

Bruchrechnen

1. Teil

Brüche kennen lernen
Erweitern und Kürzen

Schüler-Lese- und Übungstext
für Klasse 6

Die Aufgaben dieses Textes findet man auch noch
als Sammlung von Aufgabenblättern im Text 10201

Datei Nr. 10200

Stand 10. November 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Dieser Text wurde neu geschrieben, und zwar unter dem Aspekt, dass man ihn Schülern der Klasse 6 zum Üben, aber auch zum Lesen (!) vorlegen kann.

Die wichtigsten Regeln werden an Beispielen mit Abbildungen erklärt. Dann folgen Rechenbeispiele und Aufgaben zum Üben. Die Lösung steht auf der nächsten Seite.

Lernkärtchen

Am Ende des Textes finden Sie vier Seiten mit je einer Tabelle aus 18 Kästchen. Wenn man diese auf Vorder- und Rückseite eines Blattes druckt und ausschneidet, hat man Lernkärtchen, mit denen man spielerisch üben kann.

Man liest die Vorderseite des Kärtchens. Darauf steht z. B.: $\frac{23}{5}$. Der Schüler soll dann diesen unechten Bruch in eine gemischte Zahl umwandeln. Die Antwort $4\frac{3}{5}$ steht auf der Rückseite.

Weitere solche Lernkärtchen wurden in den Text 10600 aufgenommen.

Aufgabensammlung

Die Aufgaben aus diesem Text sind nochmals im Text 10201 zu Aufgabenblättern zusammengefasst. Dort allerdings teilweise mit kürzeren Lösungen. Die sehr ausführlichen Lösungen stehen hier.

Inhalt

1	Bruchteile erkennen und kürzen	3
	Kürzen durch den ggT	12
2	Brüche erweitern	14
3	Brüche auf denselben Nenner bringen	19
	Vergleichen von Brüchen	23
	Ordnen von drei Brüchen der Größe nach	24
4	Brüche, die mehr als 1 Ganzes darstellen	29
	Unechte Brüche und gemischte Zahlen	31
5	Zusammenfassung und Wiederholung	34
6	2 Blätter mit Lernkarten	37

1. Bruchteile erkennen und kürzen



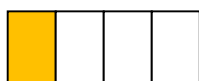
Teilen ist nur gerecht, wenn man die Teile gleich groß macht:

Klaus hat eine Tafel Schokolade in **vier gleich große Teile** zerlegt.

Weil sie gleich groß sind, darf man jedes dieser vier Teile **ein Viertel** nennen.



Man schreibt ein Viertel so: $\frac{1}{4}$ Jedes der vier gefärbten Teile ist ein Viertel (vom Ganzen).

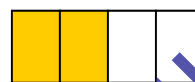


Uwe hat verschieden große Teile gemacht. Daher ist es **nicht erlaubt** zu sagen, dass jeder dieser Teile ein Viertel der ganzen Tafel ist.



Gerda darf sich von Klaus 2 Viertel nehmen:

$$\frac{2}{4}$$



Hans hat sich drei Viertel genommen:

$$\frac{3}{4}$$



Hanna dagegen hätte gerne alle 4 Viertel:

$$\frac{4}{4}$$

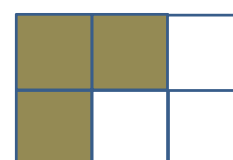
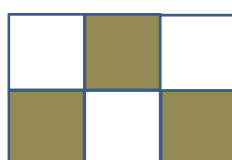
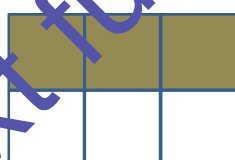
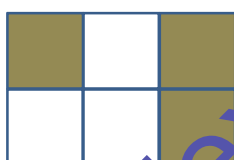


Gerda besitzt eine mit Pfefferminz gefüllte Tafel der Marke „Pfeffersechse“.

Nach dem Auspacken der Tafel erkennt sie, dass sie eine gleichmäßige Einteilung in 6 Quadrate hat. Weil alle gleich groß sind, darf man jedes Schokoladestück **ein Sechstel** nennen.



Frage: Wie viele Sechstel sind in den folgenden 4 Abbildungen dunkel gefärbt?



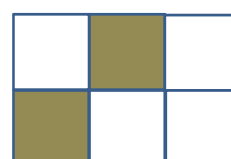
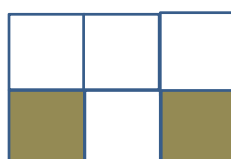
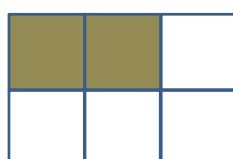
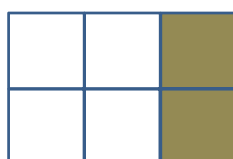
Antwort: In jeder Abbildung sind **drei Sechstel** eingefärbt, das schreibt man so $\frac{3}{6}$.

An der zweiten Abbildung erkennt man gut, dass diese drei Sechstel genau so viel sind wie eine halbe Schokoladentafel.

Man schreibt das so: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Fragen:

- In jeder Abbildung sind 2 Teile braun gefärbt. Wie schreibt man diese Menge als Bruch?
- Man kann diese 2 Teile auch durch einen anderen Bruch ausdrücken. Erkennst du ihn?



Antworten:

a) 2 der 6 Teile sind zwei Sechstel: $\frac{2}{6}$

b) In der Abbildung darunter sieht man, dass $\frac{2}{6}$ gleich

viel Schokolade ist wie ein Drittel $\frac{1}{3}$.

Man kann das so schreiben:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



Eine Pizza wurde in 8 gleich große Teile zerteilt. Jedes Stück davon ist dann $\frac{1}{8}$.
8 Achtel sind dann genau so viel wie die ganze Pizza.

Das schreibt man so auf: $\frac{8}{8} = 1$. **8 Achtel sind also 1 Ganzes.**

Die zweite Abbildung zeigt $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$.

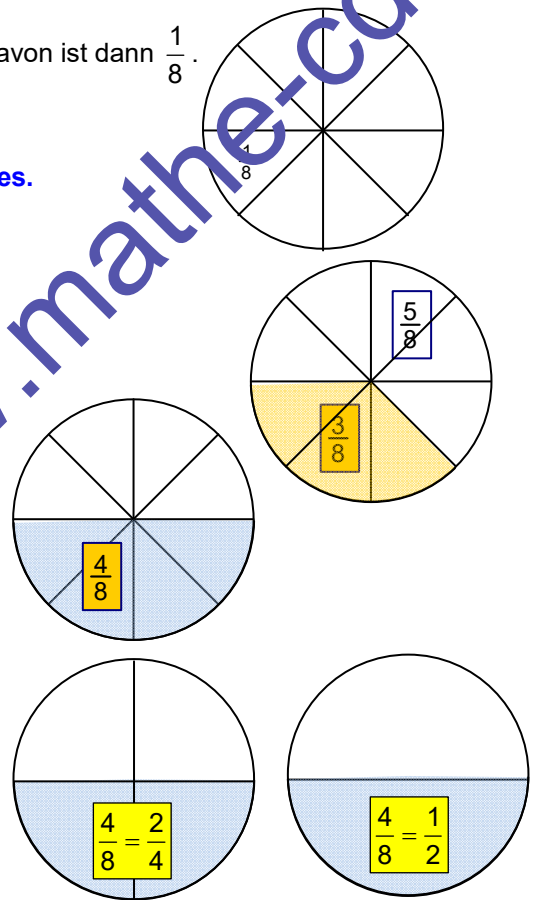
Für beide zusammen gilt $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$, also die ganze Pizza:

Nun markiere ich 4 Achtel blau. also $\frac{4}{8}$.

Die Abbildungen darunter zeigen:

4 Achtel sind gleich viel wie 2 Viertel oder 1 Halbes:

In der Bruchschreibweise: $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$ und $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.



Lernen!

Was wir hier tun, nennt man Brüche „**kürzen**“. Nach dem Kürzen haben wir größere Teile, nehmen davon aber weniger. Die Menge ist aber gleich groß geblieben!

4 von 8 Teilen (**Achtel**) sind genau so viel wie 2 von 4 Teilen (**Viertel**) oder 1 von 2 Teilen (**Halbe**).

Die Zahl, die unten steht, heißt der **Nenner**. Er nennt uns die Anzahl der entstandenen Teile.
Die Zahl, die oben steht ist der **Zähler**. Er zählt, wie viel wir davon genommen haben.

Kürzen kann man so beschreiben:

Wenn man die Anzahl der Teile halbiert, also den Nenner, dann muss man auch nur halb so viel davon nehmen, also den Zähler halbieren, damit sich die Menge nicht verändert.

Beispiele zum Kürzen:

Rechts wird ein gelber Karton in 12 gleiche Teile zerschnitten.

Nimmt man alle Teile, erhält man 12 Zwölftel,

und das sind alle: $\frac{12}{12} = 1$ (Ganzes).

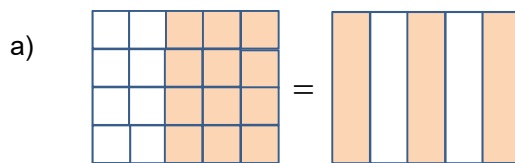
Hier erkennt man: $\frac{4}{12}$ ist gleich viel wie $\frac{1}{3}$: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Oder: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

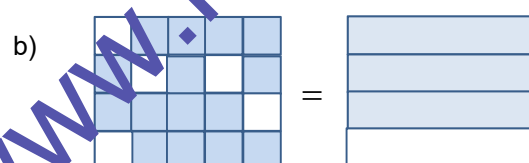
Und hier haben wir $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Üben!

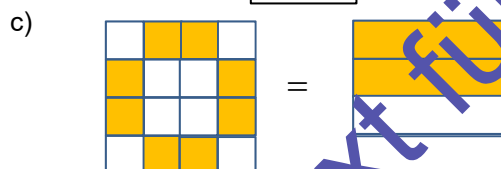
Aufgabe 1 Gib die eingefärbten Felder als Bruchteile an.



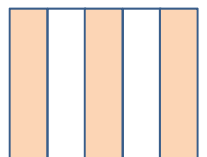
$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$



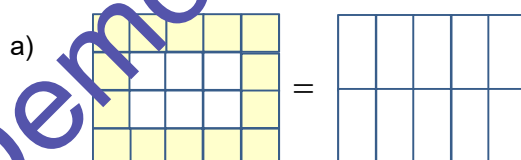
$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$



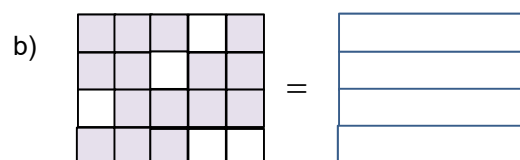
$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$



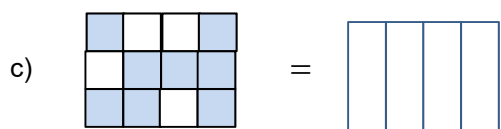
Aufgabe 2: Färbe selbst ein, so dass gleich viel gefärbt ist.



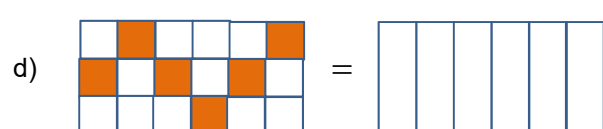
$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$



$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$



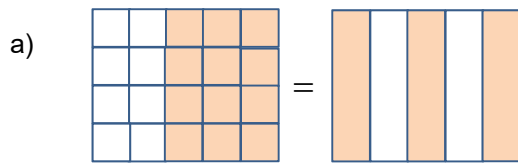
$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$



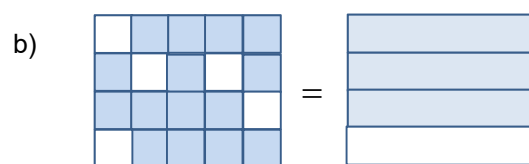
$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Hier die Lösungen:

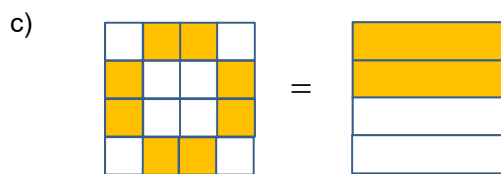
Aufgabe 1



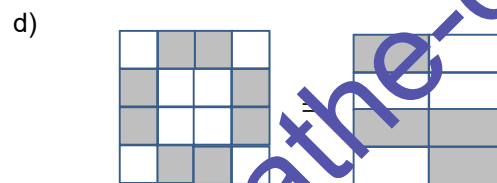
$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$



$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

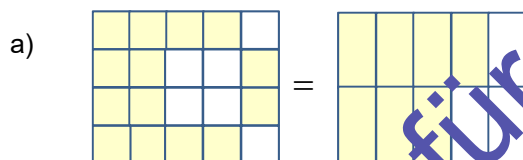


$$\frac{8}{16} = \frac{2}{4}$$

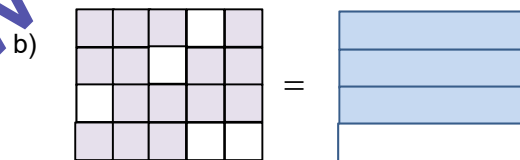


$$\frac{8}{16} = \frac{4}{8}$$

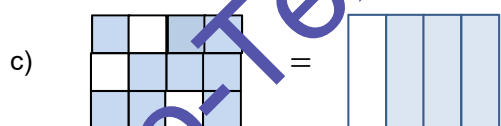
Aufgabe 2



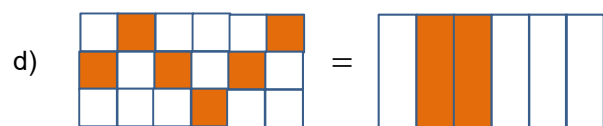
$$\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$



$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{6}{18} = \frac{2}{6}$$



Durchlesen und Mitdenken:

Wir beobachten Kürzungsvorgänge

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4 Teile von 12 wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.

Das ergibt im Zähler 1 **neues** Teil und im Nenner 3 neue Teile.

Dazu hat man Zähler und Nenner durch 4 geteilt.

Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch 4 gekürzt.**



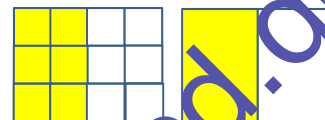
$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

6 Teile von 12 wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.

Das ergibt im Zähler 1 **neues** Teil und im Nenner 2 neue Teile.

Dazu hat man Zähler und Nenner durch 6 geteilt.

Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch 6 gekürzt.**



$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Je 3 Teile wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.

Das ergibt im Zähler 3 **neue** Teile und im Nenner 4 neue Teile.

Dazu hat man Zähler und Nenner durch 3 geteilt.

Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch 3 gekürzt.**



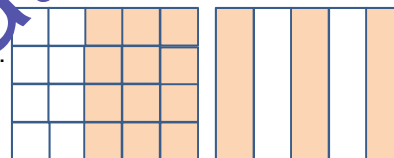
$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

4 Teile wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.

Das ergibt im Zähler 3 **neue** Teile und im Nenner 5 neue Teile.

Dazu hat man Zähler und Nenner durch 4 geteilt.

Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch 4 gekürzt.**



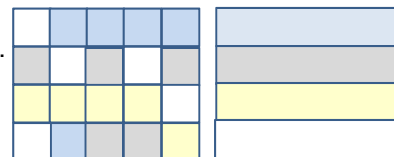
$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

5 Teile wurden zu einem größeren Teil zusammengefasst.

Das ergibt im Zähler 3 **neue** Teile und im Nenner 4 neue Teile.

Dazu hat man Zähler und Nenner durch 5 geteilt.

Man sagt dazu: **Der Bruch wurde durch 5 gekürzt.**



Bei den nächsten Beispielen verzichten wir auf die Abbildungen. Du kannst ja zurückblättern und nachsehen, wenn du willst.

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Beginnen wir unten, also im Nenner. Zu Beginn haben wir 16 Teile. Daraus machen wir 4 neue Teile. Also haben wir 4 kleine zu 1 großen Teil zusammengefasst, so dass aus 16 kleinen 4 große Teile werden. Wir dividieren also durch 4. Das muss man dann auch im Zähler tun, und so entstehen dann $8 : 4 = 2$ große Teile. Wir haben durch 4 gekürzt.

$$\frac{8}{16} = \frac{4}{8}$$

Hier geht es um denselben Bruch wie eben. Wir „**kürzen durch 2**“, also muss man Zähler und Nenner durch 2 teilen. Also sind 8 von 16 Teilen gleich viel wie 4 von 8 (dann größeren) Teilen.

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

8 und 16 kann man beide durch 8 teilen. Dann hat man den Bruch durch 8 gekürzt. Man sieht 8 Teile von 16 ist dasselbe wie die Hälfte (ein Halbes).

Aufgabe 3: Schreibe auf, durch welche Zahl gekürzt worden ist:

- a) $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ b) $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{6}{18} = \frac{2}{6}$

Lösung:

- a) $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ Es wurde durch 2 gekürzt, denn Zähler und Nenner sind durch 2 geteilt worden.
- b) $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ Es wurde durch 3 gekürzt, denn Zähler und Nenner sind durch 3 geteilt worden.
- c) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ Es wurde durch 5 gekürzt, denn Zähler und Nenner sind durch 5 geteilt worden.
- d) $\frac{6}{18} = \frac{2}{6}$ Es wurde durch 3 gekürzt, denn Zähler und Nenner sind durch 3 geteilt worden.

Weitere Übungen zum Kürzen.**Beispiel:**

$$\text{Kürze } \frac{21}{24} \text{ durch 3: } \frac{21:3}{24:3} = \frac{7}{8}$$

Durch die roten Zahlen wurde gekürzt.
Man schreibt sie nur zur Verdeutlichung an,
darf sie aber weglassen!

$$\text{Kürze } \frac{20}{36} \text{ durch 4: } \frac{20:4}{36:4} = \frac{5}{9}$$

$$\text{Kürze } \frac{11}{18} \text{ durch 2: } \quad \text{Das geht nicht, weil man 11 nicht durch 2 teilen kann.}$$

Aufgabe 4: Rechne selbst und trage das Ergebnis gleich hier ein.

- a) Kürze durch 2: $\frac{18}{36} = \frac{\quad}{\quad}$ b) Kürze durch 6: $\frac{18}{36} = \frac{\quad}{\quad}$
- c) Kürze durch 9: $\frac{18}{36} = \frac{\quad}{\quad}$ d) Kürze durch 18: $\frac{18}{36} = \frac{\quad}{\quad}$
- e) Kürze durch 3: $\frac{3}{9} = \frac{\quad}{\quad}$ f) Kürze durch 4: $\frac{8}{40} = \frac{\quad}{\quad}$
- g) Kürze durch 7: $\frac{21}{28} = \frac{\quad}{\quad}$ h) Kürze durch 8: $\frac{16}{24} = \frac{\quad}{\quad}$

- Aufgabe 5:** a) Durch welche Zahlen kann man $\frac{6}{24}$ kürzen? Zeige alle Möglichkeiten.
- b) Durch welche Zahlen kann man $\frac{10}{40}$ kürzen? Zeige alle Möglichkeiten.
- c) Durch welche Zahlen kann man $\frac{14}{28}$ kürzen? Zeige alle Möglichkeiten.

- Aufgabe 6:** Kürze mit der größten Zahl, die möglich ist.
Du kannst auch mehrfach nacheinander kürzen, wenn das leichter ist.

- a) $\frac{4}{12} = \frac{\quad}{\quad}$ b) $\frac{12}{60} = \frac{\quad}{\quad}$ c) $\frac{15}{20} = \frac{\quad}{\quad}$ d) $\frac{30}{45} = \frac{\quad}{\quad}$
- e) $\frac{16}{24} = \frac{\quad}{\quad}$ f) $\frac{40}{60} = \frac{\quad}{\quad}$ g) $\frac{18}{30} = \frac{\quad}{\quad}$ h) $\frac{30}{42} = \frac{\quad}{\quad}$
- i) $\frac{24}{32} = \frac{\quad}{\quad}$ j) $\frac{26}{39} = \frac{\quad}{\quad}$ k) $\frac{32}{80} = \frac{\quad}{\quad}$ l) $\frac{36}{54} = \frac{\quad}{\quad}$

Lösungen

Lösung 4:

- | | |
|--|--|
| a) Kürze durch 2: $\frac{18}{36} = \frac{9}{18}$ | b) Kürze durch 6: $\frac{18}{36} = \frac{3}{6}$ |
| c) Kürze durch 9: $\frac{18}{36} = \frac{2}{4}$ | d) Kürze durch 18: $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ |
| e) Kürze durch 3: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ | f) Kürze durch 4: $\frac{8}{40} = \frac{2}{10}$ |
| g) Kürze durch 7: $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ | h) Kürze durch 8: $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ |

Aufgabe 5:

- a) $\frac{6}{24}$ kann man durch 2: $\frac{6:2}{24:2} = \frac{3}{12}$, durch 3: $\frac{6:3}{24:3} = \frac{2}{8}$ oder durch 6: $\frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4}$ kürzen.

Man kann durch alle gemeinsamen Teiler von 6 und 24 kürzen. Dies sind $\{1, 2, 3, 6\}$.

Allerdings ändert Kürzen durch 1 nichts!

- b) Durch welche Zahlen kann man $\frac{10}{40}$ kürzen?

Die gemeinsamen Teiler von 10 und 40 sind: $\{1, 2, 5, 10\}$.

Kürzen durch 2: $\frac{10}{40} = \frac{5}{20}$, Kürzen durch 5: $\frac{10}{40} = \frac{2}{8}$, Kürzen durch 10: $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

- c) Durch welche Zahlen kann man $\frac{14}{28}$ kürzen?

Die gemeinsamen Teiler von 14 und 28 sind: $\{1, 2, 7, 14\}$

Kürzen durch 2: $\frac{14}{28} = \frac{7}{14}$, Kürzen durch 7: $\frac{14}{28} = \frac{2}{4}$, Kürzen durch 14: $\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 6:

Ihr schreibe in Rot dazu, wie ich gekürzt habe. Das muss man nicht tun.

- | | | | |
|--------------------------------------|--|--|--|
| a) $\frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$ | b) $\frac{12:12}{60:12} = \frac{1}{5}$ | c) $\frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$ | d) $\frac{30:15}{45:15} = \frac{2}{3}$ |
| e) $\frac{16:8}{24:8} = \frac{2}{3}$ | f) $\frac{40:20}{60:20} = \frac{2}{3}$ | g) $\frac{18:6}{30:6} = \frac{3}{5}$ | h) $\frac{30:6}{42:6} = \frac{5}{7}$ |
| i) $\frac{24:8}{32:8} = \frac{3}{4}$ | j) $\frac{26:13}{39:13} = \frac{2}{3}$ | k) $\frac{32:16}{80:16} = \frac{2}{5}$ | l) $\frac{36:18}{54:18} = \frac{2}{3}$ |

Wenn man die größte Zahl nicht gleich findet, durch die man kürzen kann, dann kürzt man eben mehrfach direkt hintereinander.

Zum Beispiel:

- k) $\frac{32:8}{80:8} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5}$ oder bei l): $\frac{36:2}{54:2} = \frac{18:9}{27:9} = \frac{2}{3}$.

Lernen

Zusammenfassung:

1. Um einen **Bruch zu kürzen**, **dividiert man Zähler und Nenner** durch einen gemeinsamen Teiler dieser Zahlen.
2. Wenn man durch den **größten gemeinsamen Teiler** (ggT) von Zähler und Nenner kürzt, erhält man das am stärksten gekürzte Ergebnis.
Wenn man diesen nicht erkennt, kann man fortgesetzt kürzen.

Um schnell und sicher kürzen zu können, sollte die **Teilbarkeitsregeln** kennen (Text 10102).

Die wichtigsten sind diese:

Eine gerade Zahl ist stets durch 2 teilbar.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn es ihre Quersumme auch ist.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn es ihre Quersumme auch ist.

Ist eine gerade Zahl durch 3 teilbar, dann auch durch 6

Eine Zahl mit der Endung 0 oder 5 ist durch 5 teilbar.

Fortgesetztes Kürzen bei großen Zahlen in Zähler und Nenner

Üben

a) $\frac{72:2}{96:2} = \frac{36:4}{48:4} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$

$$\frac{72:12}{96:12} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4} \quad \frac{72:24}{96:24} = \frac{3}{4}$$

Zuerst wurde fortgesetzt gekürzt. Ein anderer hat das schneller erledigt und gleich durch 12 gekürzt.

Wenn $\text{ggT}(72,96) = 24$ erkennt, schafft es am schnellsten.

b) $\frac{160:4}{96:4} = \frac{40:4}{24:4} = \frac{10:2}{6:2} = \frac{5}{3}$

$$\frac{160:16}{96:16} = \frac{10:2}{6:2} = \frac{5}{3}$$

Es wurde der Reihe nach zweimal durch 4 und dann durch 2 gekürzt.

Wer weiß, dass $6 \cdot 16 = 96$ ist, und im Zähler $160 = 16 \cdot 10$ erkennt, kürzt gleich durch 16.

c) $\frac{192:2}{216:2} = \frac{96:2}{108:2} = \frac{48:2}{54:2} = \frac{24:3}{27:3} = \frac{8}{9}$

$$\frac{192:4}{216:4} = \frac{48:6}{54:6} = \frac{8}{9}$$

Hier habe ich so gekürzt, wie viele Schüler: In vielen kleinen Schritten. Gerade Zahlen kann man immer durch 2 kürzen. Es geht jedoch schneller! Teilbarkeit durch 4 und durch 6 erkennen!

d) $\frac{540:6}{378:6} = \frac{90:9}{63:9} = \frac{10}{7}$

Zähler und Nenner sind gerade und besitzen eine durch 9 teilbare die Quersummen. Also sind sie auch durch 3, insgesamt durch 6 teilbar. Dann kann man noch durch 9 kürzen.

Achtung: **Richtig ausgedrückt:** **Zähler und Nenner werden dividiert.**

Der Bruch wird gekürzt.

Falsch ausgedrückt: *Zähler und Nenner werden gekürzt*

Der Bruch wird dividiert.

Kürzen durch den ggT

Leseseite

Kennt man den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner, kann man schnell kürzen.

$$\frac{140}{196} = \frac{140 : 28}{196 : 28} = \frac{5}{7}, \text{ denn } \text{ggT}(140, 196) = 28$$

Manche Lehrer besprechen dies mit ihren Schülern und verlangen dass ihre Schüler dies dann auch machen können. Diese können dann hier nochmals üben.

Die **Berechnung des ggT** bei großen Zahlen ist jedoch aufwändig. Im Zeitalter der neuen Taschenrechner wird daher nicht mehr so viel Wert darauf gelegt wie früher.

1. Methode: ggT durch Primfaktorzerlegung berechnen (Text 10102)

a) Kürze $\frac{126}{216}$ durch den ggT.

$126 = 9 \cdot 14 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$	$F = 7$
$216 = 9 \cdot 24 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$	$F = 12$
$\text{ggT} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$	

Zuerst habe ich 126 in ein Produkt zerlegt, damit man kleinere Zahlen hat: $126 = 9 \cdot 14$.

Dann ersetzt man $9 = 3 \cdot 3$ und $14 = 2 \cdot 7$ durch ihre Primfaktoren. Ähnliches geschieht bei 216.

Hier ist die Quersumme auch 9, daher ist 9 ein Teiler und ich rechne $216 : 9 = 24$ also ist

$216 = 9 \cdot 24$. Und dann wird 9 zerlegt und $24 = 8 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Man schreibt dann nur gleiche Primfaktoren untereinander. Der ggT besteht aus allen gemeinsamen Primfaktoren, ist also $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. Beim Kürzen fallen genau diese Faktoren heraus und die eingerahmten bleiben noch stehen. Im Zähler ist dies der Faktor 7, im Nenner der Faktor 12.

Damit geht die Rechnung so: Ich kürze durch den ggT, also durch 18:

$$\frac{126}{216} = \frac{126 : 18}{216 : 18} = \frac{7}{12}$$

b) Kürze $\frac{168}{210}$ durch den ggT.

$168 = 6 \cdot 28 = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2$	$F = 4$
$210 = 10 \cdot 21 = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5$	$F = 5$
$\text{ggT} = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$	

Man sieht rechts zuerst eine erste Zerlegung und dann die endgültige Aufspaltung in Primfaktoren. Man darf immer nur

gemeinsame Primfaktoren untereinander schreiben. Diese bilden den $\text{ggT}=42$, den man dann herauskürzen kann. Es wurde also durch $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ gekürzt. Stehen bleiben 4 im Zähler und im 5 Nenner.

$$\frac{168}{210} = \frac{168 : 42}{210 : 42} = \frac{4}{5}$$

c) Kürze $\frac{504}{693}$ durch den ggT. Dies sind zur Übung absichtlich große Zahlen.

Doch die Aufgabe ist leicht. Man erkennt an den Quersummen, dass Zähler und Nenner durch 9 teilbar sind. Dann hat man rasch alle Primfaktoren, kann durch $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$ kürzen

$504 = 9 \cdot 56 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$F = 8$
$693 = 9 \cdot 77 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	$F = 11$
$\text{ggT} = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$	

und erhält das Ergebnis:

$$\frac{504 : 63}{693 : 63} = \frac{8}{11}$$

2. Methode: ggT durch eine Faktorzerlegung berechnen (Text 10102)

Es ist nicht notwendig, alles in Primfaktoren zu zerlegen. Ich zeige die drei Beispiele noch einmal:

a) Kürze $\frac{126}{216}$ durch den ggT.

$126 = 9 \cdot 14 = 9 \cdot 2 \cdot \boxed{7}$	$F = 7$
$216 = 9 \cdot 24 = 9 \cdot 2 \cdot \boxed{12}$	$F = 12$
$\text{ggT} = 9 \cdot 2 = 18$	

Zuerst habe ich 126 in ein Produkt zerlegt, damit man kleinere Zahlen hat: $126 = 9 \cdot 14$.

14 und 24 haben nur noch den gemeinsamen Teiler 2: $14 = 2 \cdot 7$ und $24 = 2 \cdot 12$.

Da 7 und 12 teilerfremd sind, reicht die dargestellte Zerlegung vollkommen aus

Man schreibt also gleiche Faktoren untereinander. Und die restlichen Faktoren dürfen keinen gemeinsamen Teiler mehr haben!

Damit geht die Rechnung so: Ich kürze durch den ggT, also durch 18:

$$\frac{126}{216} = \frac{126 : 18}{216 : 18} = \frac{7}{12}$$

b) Kürze $\frac{168}{210}$ durch den ggT.

$168 = 6 \cdot 28 = 6 \cdot 7 \cdot \boxed{4}$	$F = 4$
$210 = 6 \cdot 35 = 6 \cdot 7 \cdot \boxed{5}$	$F = 5$
$\text{ggT} = 6 \cdot 7 = 42$	

Man sucht gleich nach gemeinsamen größeren Faktoren.

Beide Zahlen sind durch 6 teilbar. Dann erhält man 28 und 35,

die den ggT 7 besitzen. Die Restfaktoren 4 und 5 sind teilerfremd.

Es wurde also durch $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ gekürzt.

$$\frac{168}{210} = \frac{168 : 42}{210 : 42} = \frac{4}{5}$$

c) Kürze $\frac{504}{693}$ durch den ggT.

$504 = 9 \cdot 56 = 9 \cdot 7 \cdot \boxed{8}$	$F = 8$
$693 = 9 \cdot 77 = 9 \cdot 7 \cdot \boxed{11}$	$F = 11$
$\text{ggT} = 9 \cdot 7 = 63$	

Man erkennt an den Quersummen, dass Zähler und Nenner durch 9 teilbar sind. Dann findet man den weiteren gemeinsamen Teiler 7.

und erhält das Ergebnis

$$\frac{504 : 63}{693 : 63} = \frac{8}{11}$$

Aufgabe 7: Kürze so weit wie möglich

a) $\frac{26}{39}$ b) $\frac{24}{40}$ c) $\frac{42}{84}$ d) $\frac{81}{45}$ e) $\frac{72}{54}$ f) $\frac{81}{54}$ g) $\frac{42}{56}$ h) $\frac{63}{108}$

i) $\frac{75}{225}$ j) $\frac{48}{108}$ k) $\frac{49}{84}$ l) $\frac{96}{128}$

Aufgabe 8: Kürze so weit wie möglich

a) $\frac{126}{216}$ b) $\frac{126}{168}$ c) $\frac{140}{196}$ d) $\frac{162}{153}$ e) $\frac{180}{84}$ f) $\frac{108}{180}$ g) $\frac{336}{192}$ h) $\frac{343}{245}$

Aufgabe 9 Kürze mit dem ggT wie zuvor gezeigt,

a) $\frac{140}{196}$ b) $\frac{162}{153}$ c) $\frac{180}{84}$ d) $\frac{108}{180}$ e) $\frac{336}{192}$ f) $\frac{343}{245}$

Hier die Lösungen

Lösung 7

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \quad \frac{26 : \color{red}{13}}{39 : \color{red}{13}} = \frac{2}{3} & \text{b)} \quad \frac{24 : \color{red}{8}}{40 : \color{red}{8}} = \frac{3}{5} & \text{c)} \quad \frac{42 : \color{red}{2}}{84 : \color{red}{2}} = \frac{21 : \color{red}{21}}{42 : \color{red}{21}} = \frac{1}{2} & \text{d)} \quad \frac{81 : \color{red}{9}}{45 : \color{red}{9}} = \frac{9}{5} \\
 \text{e)} \quad \frac{72 : \color{red}{9}}{54 : \color{red}{9}} = \frac{8 : \color{red}{2}}{6 : \color{red}{2}} = \frac{4}{3} & \text{f)} \quad \frac{81 : \color{red}{9}}{54 : \color{red}{9}} = \frac{9 : \color{red}{3}}{6 : \color{red}{3}} = \frac{3}{2} & \text{g)} \quad \frac{42 : \color{red}{2}}{56 : \color{red}{2}} = \frac{21 : \color{red}{7}}{28 : \color{red}{7}} = \frac{3}{4} & \text{h)} \quad \frac{63 : \color{red}{9}}{108 : \color{red}{9}} = \frac{7}{12} \\
 \text{i)} \quad \frac{75 : \color{red}{25}}{225 : \color{red}{25}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} & \text{j)} \quad \frac{48 : \color{red}{4}}{108 : \color{red}{4}} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} & \text{k)} \quad \frac{49 : \color{red}{7}}{84 : \color{red}{7}} = \frac{7}{12} & \text{l)} \quad \frac{96 : \color{red}{32}}{128 : \color{red}{32}} = \frac{3}{4}
 \end{array}$$

Lösung 8

Bei diesen Aufgaben gibt es ganz unterschiedliche Wege. Man muss eben die Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden. Es lohnt sich auch, Quadratzahlen zu kennen, etwa in c) $14 \cdot 14 = 196$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad \frac{126 : \color{red}{2}}{216 : \color{red}{2}} = \frac{63 : \color{red}{9}}{108 : \color{red}{9}} = \frac{7}{12} & \text{b)} \quad \frac{126 : \color{red}{2}}{168 : \color{red}{2}} = \frac{63 : \color{red}{3}}{84 : \color{red}{3}} = \frac{21 : \color{red}{7}}{28 : \color{red}{7}} = \frac{3}{4} \\
 \text{c)} \quad \frac{140 : \color{red}{14}}{196 : \color{red}{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} & \text{d)} \quad \frac{162 : \color{red}{9}}{153 : \color{red}{9}} = \frac{18}{17} \\
 \text{e)} \quad \frac{180 : \color{red}{2}}{84 : \color{red}{2}} = \frac{90 : \color{red}{2}}{42 : \color{red}{2}} = \frac{45 : \color{red}{3}}{21 : \color{red}{3}} = \frac{15}{7} & \text{f)} \quad \frac{108 : \color{red}{9}}{180 : \color{red}{9}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \\
 \text{g)} \quad \frac{336 : \color{red}{4}}{192 : \color{red}{4}} = \frac{84 : \color{red}{4}}{48 : \color{red}{4}} = \frac{21 : \color{red}{3}}{12 : \color{red}{3}} = \frac{7}{4} & \text{h)} \quad \frac{343 : \color{red}{7}}{245 : \color{red}{7}} = \frac{49 : \color{red}{7}}{35 : \color{red}{7}} = \frac{7}{5}
 \end{array}$$

Lösung 9

$$\text{a)} \quad \frac{140}{196} = \frac{140 : \color{red}{28}}{196 : \color{red}{28}} = \frac{5}{7}$$

Man kann durch $14 \cdot 2 = 28$ kürzen.

Die Restfaktoren (RF) bleiben im Zähler und Nenner stehen

$$\text{b)} \quad \frac{162}{153} = \frac{162 : \color{red}{9}}{153 : \color{red}{9}} = \frac{18}{17}$$

$$\text{c)} \quad \frac{180}{84} = \frac{180 : \color{red}{12}}{84 : \color{red}{12}} = \frac{15}{7}$$

$$\text{d)} \quad \frac{108}{180} = \frac{108 : \color{red}{36}}{180 : \color{red}{36}} = \frac{3}{5}$$

oder gleich durch 36 kürzen.

$$\text{e)} \quad \frac{336}{192} = \frac{336 : \color{red}{48}}{192 : \color{red}{48}} = \frac{7}{4}$$

$$\begin{array}{ll}
 140 = 14 \cdot 10 = \color{red}{14} \cdot \color{red}{2} \cdot 5 & \text{RF} = 5 \\
 196 = 14 \cdot 14 = \color{red}{14} \cdot \color{red}{2} \cdot 7 & \text{RF} = 7 \\
 \text{ggT} & = \color{red}{14} \cdot \color{red}{2} = \color{red}{28}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 162 = \color{red}{9} \cdot 18 & \text{RF} = 18 \\
 153 = \color{red}{9} \cdot 17 & \text{RF} = 17 \\
 \text{ggT} & = \color{red}{9}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 180 = \color{red}{12} \cdot 15 & \text{RF} = 15 \\
 84 = \color{red}{12} \cdot 7 & \text{RF} = 7 \\
 \text{ggT} & = \color{red}{12}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 108 = 12 \cdot 9 = \color{red}{12} \cdot \color{red}{3} \cdot 3 & \text{RF} = 3 \\
 180 = 12 \cdot 15 = \color{red}{12} \cdot \color{red}{3} \cdot 5 & \text{RF} = 5 \\
 \text{ggT} & = \color{red}{12} \cdot \color{red}{3} = \color{red}{36}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 336 = 3 \cdot 112 = 3 \cdot 4 \cdot 28 = \color{red}{3} \cdot \color{red}{4} \cdot \color{red}{4} \cdot 7 & \text{RF} = 7 \\
 192 = 3 \cdot 64 = 3 \cdot 4 \cdot 16 = \color{red}{3} \cdot \color{red}{4} \cdot \color{red}{4} \cdot 4 & \text{RF} = 4 \\
 \text{ggT} & = \color{red}{3} \cdot \color{red}{4} \cdot \color{red}{4} = \color{red}{48}
 \end{array}$$

Diese Berechnung ist sehr aufschlussreich. Bei großen Zahlen zerlegt man so lange in Faktoren, bis nur noch teilerfremde übrig bleiben. Diese bilden dann das gekürzte Ergebnis, die rot markierten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner werden herausgekürzt.

$$\text{f)} \quad \frac{343}{245} = \frac{343 : \color{red}{49}}{245 : \color{red}{49}} = \frac{7}{5}$$

$$\begin{array}{ll}
 343 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = \color{red}{49} \cdot \color{red}{7} & \text{RF} = 7 \\
 245 = 5 \cdot 49 = \color{red}{49} \cdot 5 & \text{RF} = 5 \\
 \text{ggT} & = \color{red}{49}
 \end{array}$$